

Matematika 3 / 2. ročník (zimný semester = 3. semester)
termín písania: v priebehu januára 2005

Skupina C1

1a. Firma BELLS Inc. sa realizuje na trhu obligácií. Zamestnali skúseného analytika, ktorý má za úlohu zistiť časový vývoj rovnovážnych cien vybraných bondov, predovšetkým vývoj ceny danej dopytom a ponukou po obligáciách firmy Santa Claus Inc. Firma BELLS má o tejto dlhopisy strategický záujem. Avšak si nie je istá, či by neinvestovali do papierov, ktorých cena by sa nevyvíjala stabilne a predvídateľne.

Analytik zistil na základe skúmania trhu funkciu dopytu a ponuky. Keďže trhová cena závisí najmä od úrokovej miery (očakávaného výnosu z obligácií) respektíve jej zmeny, funkcie dopytu a ponuky sú dané:

$$D: q_d = 100 + 8r(t) + 2r'(t)$$

$$S: q_s = 150 - 2r(t) - r'(t)$$

Kde t je čas a r je úroková miera v čase t . Určite časový vývoj rovnovážnej úrokovej miery a jej asymptotickú hodnotu za predpokladu, že momentálna úroková miera bondov firmy Santa Claus je 10 %.

1b. Ako hovoríme riešeniu obyčajnej diferenciálnej rovnice (ODR) prvého rádu $x'(t) = x^2$? Uvedte ešte jeden príklad ODR prvého rádu s touto vlastnosťou a načrtnite integrálne krivky.

2a. Určite fázový priestor, načrtnite trajektórie, vypočítajte všeobecné riešenie a riešenie spĺňajúce počiatočnú podmienku pre sústavu dvoch obyčajných lineárnych diferenciálnych rovníc (OLDR) prvého rádu s konštantným koeficientom.

$$x'_1 = x_1 - \frac{7}{4}x_2 \quad x_1(0) = 1$$

$$x'_2 = -4x_1 - \frac{1}{2}x_2 - 2 \quad x_2(0) = 4$$

2b. Prevedte komplexné riešenie sústavy dvoch OLDR prvého rádu s konštantnými koeficientmi do reálneho tvaru.

$$[x_1 \text{ nad } x_2] = c_1 * e^{2it} [1 \text{ nad } i] + c_2 * e^{-2it} [1 \text{ nad } -i]$$

3a. Pomocou Ióotovej vety vypočítaj prvý diferenciál rovnice

$f(S,t) = \ln(t/S)$, kde S je riešenie stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dS = \mu(S,t)dt + d(S,t)dW(t) \text{ pričom } \mu(S,t) = 0,1S; d(S,t) = 0,2S$$

3b. Aký je rozdiel medzi Európskou a Americkou opciou? Popíšte vzťahy medzi cenami európskych a amerických. Ktoré **put** alebo **call** sú rovnaké a prečo?

4a. Uvažujeme stratégiu Bought Straddle, ktorá spočíva v nákupe jednej Eur Call a jednej Eur Put opcie na tú istú akciu s rovnakými reálnymi cenami E a rovnakou dobou expirácie T .

I. Nakreslite Pay off diagram pre danú stratégiu

II. Vypočítajte optimálnu hodnotu V ak je dané:

$$S = \$96; E = \$100; \tau = 0,25 \text{ roka}; \sigma = 0,4; r = 0,1 (10\%)$$

III. Ako sa zmení táto hodnota ak:

i. trhová cena klesne na \$90

ii. čas do expirácie sa predĺži o 36 dní (0,1 roka)

iii. volatilita sa zvýši na 45 %

iv. bezriziková úroková miera klesne na 9 %

$$(V_{ec} = 6,97; \Delta_{ec} = 0,51; \Theta_{ec} = 19,5; \text{Vega}_{ec} = 19,14; \text{Rho}_{ec} = 10,46)$$

4b. Čo je kúpna (Call) a predajná (Put) opcia? V akých situáciách sa oplatí používať tieto typy opcií? Aká môže byť (teoreticky) minimálna a maximálna cena Európskej Call a Put opcie?

Skupina C2

- 1a. Analytik obchodného domu Tesco zistil, že vzťah medzi cenou 1 litra mlieka (p) a týždennou tržbou za mlieko v oddelení potravín (y) je daný rovnosťou:

$$y'(p) = \frac{-0.25y(p)}{p+6}$$

Pri priemernej cene 15Sk sa za týždeň predá 3000l mlieka. Určite funkciu $y(p)$ vyjadrujúcu závislosť tržby od ceny a jej asymptotickú hodnotu.

- 1b. Dokážte vetu: Nech M je fázový priestor procesu. Bod $\mathbf{x}_s$ je elementom M je stacionárnym bodom toku g^t vtedy a len vtedy, keď je kritickým bodom vektorového poľa fázovej rýchlosti.

- 2a. Určite fázový priestor, načrtnite trajektórie, vypočítajte všeobecné riešenie a riešenie spĺňajúce počiatočnú podmienku pre sústavu dvoch obyčajných lineárnych diferenciálnych rovníc prvého rádu s konštantným koeficientom.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_1 &= 6\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + 1 & \mathbf{x}_1(0) &= -2 \\ \mathbf{x}'_2 &= -7\mathbf{x}_1 - 1 & \mathbf{x}_2(0) &= 2 \end{aligned}$$

- 2b. Čomu sa rovná exponent matice A ? Vypočítajte e^A , ak $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

- 3a. Pomocou Itôtovej vety vypočítaj prvý diferenciál funkcie

$$f(S,t) = \ln \left(1 + \frac{S}{t} \right), \text{ kde } S \text{ je riešenie stochastickej diferenciálnej rovnice}$$

$$dS = \mu(S,t)dt + \sigma(S,t)dW(t) \text{ pričom } \mu(S,t) = 0,5S; \sigma(S,t) = 0,3S$$

- 3b. Odvodte expiračnú podmienku Black-Scholesovej PDR pre Eur Call a Put opciu.

- 4a. Uvažujeme opčnú stratégiu, ktorá spočíva v kúpe jednej Eur Call a jednej Eur Put opcie s rovnakými realizačnými cenami E_1 a predaji Eur Call opcie s realizačnou cenou E_2 (pričom $E_1 < E_2$) výpis na tú istú akciu, s rovnakou dobou expirácie T .

I. Nakreslite Pay off diagram pre danú stratégiu

II. Vypočítajte optimálnu hodnotu V ak je dané:

$$S = \$80; E_1 = \$70; E_2 = \$90; \tau = 0,25 \text{ roka}; \sigma = 0,2; r = 0,07 (7\%)$$

III. Ako sa zmení táto hodnota ak:

- trhová cena klesne na \$75
- čas do expirácie sa predĺži na 0,3
- volatilita sa zvýši na 22 %
- bezriziková úroková miera klesne na 5 %

$$(V_{c1} = 11,43; \Delta_{c1} = 0,94; \Theta_{c1} = 6,36; \text{Vega}_{c1} = 4,72; \text{Rho}_{c1} = 15,96)$$

$$(V_{c2} = 0,7; \Delta_{c2} = 0,17; \Theta_{c2} = 4,72; \text{Vega}_{c2} = 10,14; \text{Rho}_{c2} = 3,23)$$

- 4b. Nakreslite Pay off diagram opčnej stratégie Cost-or-Nothing, pri ktorej majiteľ opcie získa pevný výnos (povedzme hodnotu 10) ak cena akcie S presiahne v čase expirácie reálnu cenu E , ináč nezíska nič.

Skupina C3

- 1a. Určte časový vývoj rovnovážnej úrokovej miery a jej asymptotickú hodnotu, ak rovnice dopytu a ponuky sú $q_d = 400 - 4r(t) - r'(t)$ a $q_s = 300 + 20r'(t)$, kde t je čas, $r(t)$ je úroková miera v čase t a momentálna úroková miera je 15 %.
- 1b. Určte základné vlastnosti evolučného procesu narastania vkladov na bankovom účte pri pevne stanovenom spojitom úroku r . Napíšte ODR prvého rádu, ktorou je tento process popísaný a vyriešte ju.
- 2a. Určte fázový priestor, načrtnite trajektórie, vypočítajte všeobecné riešenie a riešenie spĺňajúce počiatočnú podmienku pre sústavu dvoch obyčajných lineárnych diferenciálnych rovníc prvého rádu s konštantným koeficientom.

$$\begin{aligned} x'_1 &= -3x_1 + 3 & x_1(0) &= -3 \\ x'_2 &= 7x_1 + 3x_2 - 3 & x_2(0) &= -7 \end{aligned}$$
- 2b. Uved'te najjednoduchší systém dvoch obyčajných lineárnych diferenciálnych rovníc prvého rádu s konštantnými koeficientami, ktorý ma odstredivé ekvilibrium v bode $[0,0]$.
- 3a. Pomocou Iótovej vety vypočítajte $f(S,t) = (S-t) / (S+t)$, kde S je riešenie stochastickej diferenciálnej rovnice $dS = \mu(S,t)dt + d(S,t)dW_t$, pričom $\mu(S,t) = 3S$ a $d(S,t) = 4S$
- 3b. Uved'te rozdiel medzi BLACK-SCHOLES rovnicou pre vývoj cien finančných derivátov, ak uvažujeme, resp. neuvažujeme vyplácanie dividend.
- 4a. Uvažujeme opčnú stratégiu, ktorá spočíva v kúpe jednej CALL opcie s vysokou realizačnou cenou E_2 a jednej PUT opcie s nízkou realizačnou cenou E_1 , vypísaných na tú istú akciu, s rovnakou dobou expirácie T .
 - I. Nakreslite Pay off diagram pre danú stratégiu
 - II. Vypočítajte optimálnu hodnotu V tejto stratégie, ak je dané:
 $S = \$80$; $E_1 = \$70$; $E_2 = \$90$; $\tau = 0,25$ roka; $\sigma = 0,2$; $r = 0,07$ (7%)
 - III. Ako sa zmení táto hodnota ak:
 - i. trhovú cenu akcie sa zvýši na $\$85$
 - ii. čas do expirácie bude $0,5$
 - iii. volatilita sa zvýši na 30%
 - iv. bezriziková úroková miera klesne na 5%

$(V_{c1} = 11,43$; $\Delta_{c1} = 0,94$; $\Theta_{c1} = 6,36$; $\text{Vega}_{c1} = 4,72$; $\text{Rho}_{c1} = 15,96$)
 $(V_{c2} = 0,7$; $\Delta_{c2} = 0,17$; $\Theta_{c2} = 4,96$; $\text{Vega}_{c2} = 10,14$; $\text{Rho}_{c2} = 3,23$)
- 4b. Zakladné typy finančných derivátov a ich spoločné znaky.

Skupina C4

- 1a. $y'(p) = -0,7y(p) / (p+5)$
 $p(5) = 1200$
- 1b. Napíš, čím je riešenie charakteristické a uved' príklad podobného typu.
- 2a. Nelinearna sustava.
- 2b. Je daná matica $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $x(0)$, t .
 $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$
 dôkaz, že platí: $x(t) = e^{At}x(0)$
- 3a. Pomocou Iótovej vety napíš prvý diferenciál rovnice
 $F = \sin(S,t)$, pričom $\text{volatilita} = 3S$, $n(S,t) = 0,5$
- 3b. Napíš vzťah a charakterizuj senzitivitu (podľa volatility, úrokovej miery).
- 4a. Opčná stratégia, ktorá spočíva v nákupe jednej Call a jednej Put opcie, pričom $E_1 = E_2$.
- 4b. Oceňovanie opcií, vnútorná a časová hodnota.

Skupina C6

1a. $D = 220 - p(t) + 3.5p'(t)$

$S = 150 + p(t) + 5p'(t)$

Momentálna cena 15 Sk.

1b. Uveď príklady ODR s jednorozmerným fázovým priestorom s odstredivým a priťahujúcim ekvilibriom. Načrtni vektorové pole fázovej rýchlosti a integrálne krivky.

2a. Určite fázový priestor, načrtnite trajektórie, vypočítajte všeobecné riešenie a riešenie spĺňajúce počiatočnú podmienku pre sústavu dvoch obyčajných lineárnych diferenciálnych rovníc prvého rádu s konštantným koeficientom.

$$\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + 4 \quad \mathbf{x}_1(0) = 2$$

$$\mathbf{x}'_2 = -\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 - 3 \quad \mathbf{x}_2(0) = 1$$

2b. Urobte linearizáciu sústavy dvoch obyčajných nelineárnych diferenciálnych rovníc prvého rádu s konštantným koeficientom

$$\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}_1^3 - 3\mathbf{x}_2^3$$

$$\mathbf{x}'_2 = 3\cos(\pi \mathbf{x}_1) - \mathbf{x}_2$$

v okolí ustáleného stavu (1,1).

3a. Pomocou Ióotovej vety napíš prvý diferenciál rovnice

$$\mathbf{f}(\mathbf{S},t) = \text{ArcTan}(\mathbf{S}/t), \text{ pričom } \mathbf{n}(\mathbf{S},t) = 5\mathbf{S}, \text{ a } \mathbf{?}(\mathbf{S},t) = 3\mathbf{S}$$

3b. Vysvetli pojem „short selling“. Kedy pri CALL zbohatne holder, resp. writer? Aké riziko pri PUT má každá zúčastnená strana?

4a. Kúpa jednej CALL s nízkou E_1 a jednej PUT s tou istou nízkou E_1 a predaj jednej CALL s vysokou E_2 na tú istú akciu s rovnakou dobou expirácie T .

I. Nakreslite Pay off diagram

II. Vypočítajte optimálnu hodnotu tejto stratégie, ak:

$$S = \$80; E_1 = \$70; E_2 = \$90; \tau = 0,25 \text{ roka}; \sigma = 0,2; r = 0,07 (7\%)$$

III. Ako sa zmení táto hodnota ak:

i. trhovú cenu akcie sa zvýši na \$83

ii. čas expirácie sa predĺži o 0,1

iii. volatilita sa zvýši na 35 %

iv. bezriziková úroková miera klesne na 4 %

$$(V_{c1} = 11,43; \Delta_{c1} = 0,94; \Theta_{c1} = 6,36; \text{Vega}_{c1} = 4,72; \text{Rho}_{c1} = 15,96)$$

$$(V_{c2} = 0,7; \Delta_{c2} = 0,17; \Theta_{c2} = 4,96; \text{Vega}_{c2} = 10,14; \text{Rho}_{c2} = 3,23)$$

4b. Nakresli payoff Asset-or-Nothing pri ktorom majiteľ opcie získa hodnotu akcie S pokiaľ táto cena nepresiahne v čase expirácie realizačnú cenu E , ináč nezíska nič.